Estabilidade da rotação ao redor dos eixos principais

Embora, na ausência de torques, um corpo possa rodar livremente ao redor de um dos seus eixos principais, na prática é impossível acertar a condição inicial para ser exatamente esta. O máximo que se consegue é um eixo inicial próximo de um dos principais.
É interessante então se perguntar quanto à estabilidade dessas rotações, ou seja, se um eixo de rotação inicialmente próximo a um eixo principal permanece com essa característica ("equilíbrio estável") ou se tende a se afastar ("equilíbrio instável").

Suponha por exemplo que $\omega_1, \omega_2 \ll \omega_3$, de modo que o eixo de rotação está quase ao redor de $\hat{e}_3$. Desprezando somente o termo $\omega_1 \omega_2$ nas eqs. de Euler, temos então

$$I_3 \dot{\omega}_3 \sim 0 \rightarrow \omega_3 = cte$$

$$I_1 \dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3)\,\omega_2 \omega_3$$

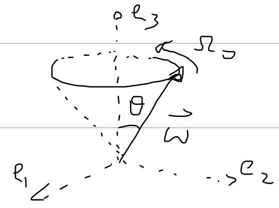
$$I_2 \dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1)\,\omega_1 \omega_3$$

$$\ddot{\omega}_1 + \overbrace{\left[\left(\frac{I_3 - I_2}{I_2}\right)\frac{(I_3 - I_1)}{I_1}\,\omega_3^2\right]}^{\equiv\, \Omega_0^2} \omega_1 = 0$$

Se $\Omega_0^2 > 0 \rightarrow$ osc. harm. $\rightarrow \omega_1(t) = \omega_{1_{MAX}} \cos(\Omega_0 t + \varphi_0)$

$$\rightarrow \omega_2 = \frac{I_1}{(I_2 - I_3)\,\omega_3}\,\dot{\omega}_1 = \frac{I_1 \Omega_0}{(I_3 - I_2)\,\omega_3}\,\omega_1^{max}\, \mathrm{sen}(\Omega_0 t + \varphi_0)$$

Assim, nesse caso o vetor $\vec{\omega}$ permanece com a sua componente 3 constante, enquanto que a componente no plano (12) rotaciona com velocidade angular Ω_0. Em outras palavras, o vetor $\vec{\omega}$ <u>precessiona</u> ao redor do eixo $\hat{e}_3$



, com sua ponta percorrendo uma <u>elipse</u> de raios principais $a = \omega_1^{max}$, $b = \omega_2^{max}$

Observe que, em todo momento, $\omega_1 \omega_2 < \omega_{1max}^2 \ll \omega_3$, de modo que a aproximação permanece consistente com a solução. Trata-se assim de um caso de equilíbrio <u>estável</u> ao redor do eixo $\hat{e}_3$

Por outro lado, se $\Omega_0^2 < 0$, a solução p/ a eq. diferencial fica em termo de exponenciais. Escrevendo $\Omega_0^2 = -\lambda^2$

$\omega_1(t) = Ae^{\lambda t} + Be^{-\lambda t}$. O termo em A tende a fazer $\omega_1(t)$ crescer rapidamente, afastando portanto $\vec{\omega}$ de e_3. O equilíbrio é <u>instável</u>. Nesse caso, porém, a aproximação feita no início é violada, e a solução real será bem mais complicada.

Obs: se $A = 0$, teríamos $\omega_1(t) = \omega_1(0)e^{-\lambda t}$ e $\omega_2(t) = \dfrac{I_1 \lambda\, \omega_1(0)}{(I_3 - I_2)\omega_3} e^{-\lambda t}$
então essa solução também é estável.
Porém, novamente, é impossível na prática conseguir preparar uma cond. inicial com $A = 0$ <u>exatamente</u>.

Em resumo: para termos, na prática, um corpo que se mantenha rolando livremente ao redor de um dos seus eixos principais, precisamos $\Omega_0^2 > 0$, ou seja:

$$(I_3 - I_2)(I_3 - I_1) > 0$$

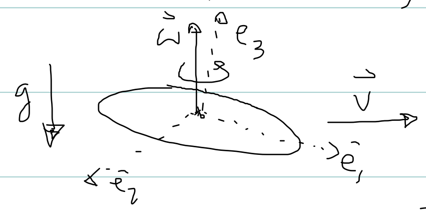
Isso ocorre se os momentos principais satisfazem uma de duas condições possíveis:

$$I_1 > I_3 \text{ e } I_2 > I_3 \quad \text{ou} \quad I_1 < I_3 \text{ e } I_2 < I_3$$

$\therefore$ o eixo deve ser o de maior ou menor momento de inércia.

Construção de Poinsot – pular

"Frisbee" (ex. 4.8.1)



Objeto com formato de disco arremessado horizontalmente, girando inicialmente ao redor de um eixo que não é seu eixo de simetria.

Para analisar como será o movimento rotacional do frisbee, usaremos 2 referenciais: i) Ref Σ no solo, com eixos $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$; ii) Ref Σ' fixo ao corpo, com origem no CM (centro do disco) e eixos $\hat{e}_i$ ao longo dos eixos principais de inércia. Aplicando os teoremas de simetria, vemos que estes podem ser tomados como sendo: $\hat{e}_3$ ao longo do eixo de simetria, e $\hat{e}_1, \hat{e}_2$ quaisquer dois eixos mutuamente perpendiculares entre si e tb. a $\hat{e}_3$, sendo ainda $I_1 = I_2$

Os momentos principais para um disco chato satisfazem

$$I_1 = \int_0^{2\pi}\int_0^R \sigma\, (y^2 + \cancel{z^2}^{\,0})\, \rho\, d\rho\, d\theta = \sigma \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{M}{\pi R^2} \cdot \frac{2\pi}{2} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{MR^2}{4}$$

$$I_3 = I_1 + I_2 = 2I_1 = \frac{MR^2}{2}$$

A única força externa é o peso, e sabemos que seu torque c/ respeito ao CM é nulo [o peso se exerce "como se toda a massa estivesse concentrada no CM"]. Assim, as eqs. de Euler ficam

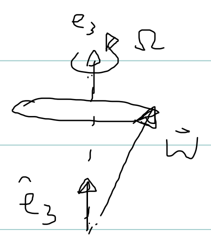
$$\cancel{I_1}\dot{\omega}_1 - \overbrace{(I_1 - I_3)}^{-\cancel{I_1}}\,\omega_2\omega_3 = 0 \qquad I_3\dot{\omega}_3 = 0 \longrightarrow \boxed{\omega_3 = cte \equiv \Omega}$$

$$\cancel{I_1}\dot{\omega}_2 - \underbrace{(I_3 - I_1)}_{\cancel{I_1}}\,\omega_1\omega_3 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\omega}_1 = -\Omega\omega_2 \; ; \; \dot{\omega}_2 = \Omega\omega_1}$$

(mesma forma das eqs. vistas no exemplo anterior, embora por um motivo diferente)

Como antes, a solução é um movimento de precessão de $\vec{\omega}$ ao redor do eixo $\hat{e}_3$, com vel. angular Ω



$$\ddot{\omega}_1 = -\Omega^2\omega_1 \longrightarrow \omega_1(t) = \omega_{1_{MAX}}\cos(\Omega t + \varphi_0)$$

$$\rightarrow \omega_2 = -\frac{\dot{\omega}_1}{\Omega} = \omega_{1\,MAX}\,\mathrm{sen}(\Omega t + \varphi_0)$$

MAS atenção: esta é a solução vista do referencial Σ', ou seja, do ponto de vista de quem gira junto com o corpo. Se queremos saber o que alguém no ref. inercial observa, precisamos transformar as componentes de $\vec{\omega}$ para os eixos fixos, usando a matriz de rotação $A^{-1}(\theta(t), \phi(t), \psi(t)) = A^T(\theta, \phi, \psi)$ em termo dos ângulos de Euler

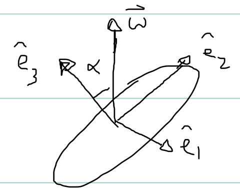
O problema é que não sabemos ainda como esses ângulos variam no tempo! Para isso teríamos em princípio que integrar as eqs. ligando $\omega_{1,2,3}$ a $\dot\theta, \dot\phi, \dot\psi$ (eq. 3.4.30 no livro)

No caso deste sistema específico, podemos simplificar consideravelmente este problema matemático com uma escolha inteligente dos eixos $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$, os quais determinam a referência para a definição dos ângulos ϕ, θ, ψ.

Considere 1º que, <u>no referencial inercial</u> Σ : $\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_\Sigma = \vec{N}_{Peso} = 0 \rightarrow \vec{L} = cte$

Podemos escolher então o eixo inercial $\hat{z}$ na direção de $\vec{L}$ $\left(\therefore \vec{L} = (0,0,L)_\Sigma\right)$

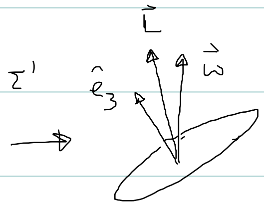
Retornando ao ref. Σ', considere também que temos o direito de escolher qualquer par de eixos perpendiculares a $\hat{e}_3$ como $\hat{e}_1, \hat{e}_2$. Tomemos, em $t=0$, $\hat{e}_1 = \frac{\vec{\omega}}{\omega} \times \hat{e}_3$, de modo que $\vec{\omega}(0) = (0, \omega \operatorname{sen}\alpha, \omega\cos\alpha)_{\Sigma'}$ onde α é o ângulo (agudo) entre $\vec{\omega}$ e $\hat{e}_3$



(note que, comparando com a solução acima,

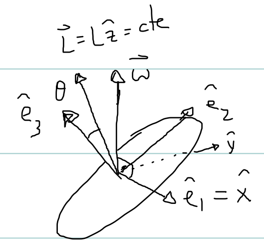
$\omega\cos\alpha = \Omega$, $\omega \operatorname{sen}\alpha = \omega_{1MAX}$, $\varphi_0 = \pi/2$)

Agora: $\vec{L} = I\,\vec{\omega} = (I_1\omega_1,\ \overset{I_1}{\overset{\shortparallel}{I_2}}\omega_2,\ \overset{2I_1}{\overset{\shortparallel}{I_3}}\omega_3)_{\Sigma'} = I_1\left(0,\ \omega_{1MAX},\ 2\Omega\right)_{\Sigma'}$ $\longrightarrow$



↳ usando o fato dos eixos Σ' serem principais

Comparando as duas expressões para o mesmo vetor $\vec{L}$, vemos que nesse instante o eixo $\hat{e}_1$ preso ao corpo é perpendicular a $\hat{z}$! Podemos então escolher o eixo fixo $\hat{x}$ coincidente com essa direção instantânea de $\hat{e}_1 = \hat{x}'$.



Com essas escolhas, o único ângulo de Euler $\neq 0$ nesse instante é θ! (i.e, $\phi = \psi = 0$!), correspondendo ao ângulo entre $\vec{L}$ e $\hat{e}_3$.

Assim, podemos escrever $L_2 = L\,\mathrm{sen}\,\theta$, $L_3 = L\cos\theta \Rightarrow \omega_{1MAX} = \frac{L\,\mathrm{sen}\,\theta}{I_1}$; $\Omega = \frac{L\cos\theta}{2I_1}$

Substituindo então na eq. 3.4.30, podemos concluir que

$$0 = \omega_1 = \dot{\theta} \longrightarrow \boxed{\theta = cte};$$

$$\omega_{1MAX} = \omega_2 = \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta \longrightarrow \dot{\phi} = \frac{\omega_{1MAX}}{\mathrm{sen}\,\theta} = \frac{L\,\cancel{\mathrm{sen}\,\theta}}{I_1\,\cancel{\mathrm{sen}\,\theta}} = \frac{L}{I_1} = cte \longrightarrow \boxed{\phi(t) = \cancelto{0}{\phi(0)} + \frac{L}{I_1}t}$$

$$\Omega = \omega_3 = \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi} \Rightarrow \frac{L\cos\theta}{2I_1} = \frac{L\cos\theta}{I_1} + \dot{\psi} \rightarrow \dot{\psi} = -\frac{L\cos\theta}{2I_1} = cte \longrightarrow \boxed{\psi(t) = -\frac{L\cos\theta}{2I_1}t}$$

Obtemos assim a solução completa para o movimento de rotação do frisbee!

obs: aqui usamos, implicitamente, que na verdade o "instante $t=0$" é arbitrário, de modo que as eqs para $\dot\theta, \dot\phi, \dot\psi$ obtidas acima valem na verdade p/ $\forall\, t$, e podem portanto ser integradas.

Vamos analisar a solução obtida, do ponto de vista de um observador inercial.

1. O eixo $\hat e_3$ do frisbee precessa ao redor da direção $\hat z$ fixa, mantendo-se sempre inclinado de um mesmo ângulo θ.

2. A precessão se dá com veloc. angular $\dot\phi$ constante.

3. Ao mesmo tempo, o frisbee também gira ao redor do seu eixo $\hat e_3$, com velocidade angular $\dot\psi$ também constante, e no sentido <u>oposto</u> ao da precessão.

(observe ainda que este valor constante é igual em módulo (mas no sentido oposto) à componente ω_3 da vel. angular, pois $\omega_3 = \frac{2\Omega}{I_3} = \frac{\Omega}{I_1} = \frac{L\cos\theta}{2}$

4. Se o ângulo θ for pequeno, de modo que $\cos\theta \approx 1$, então $|\dot\psi| \approx \frac{\dot\phi}{2}$, ie, o movimento de precessão tem aproximadamente o <u>dobro</u> da frequência ($\therefore$ metade do período) do de rotação